TAKÁCS TÍMEA I. éves hallgató
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Budapest

Bizonyosságtól a kétkedésig, kétkedéstől a bizonyosságig

- MATEMATIKATÖRTÉNET DIÓHÉJBAN -

A matematika sokak számára tételekből és bizonyításokból áll, amely tételek és bizonyításaik minden lépése megcáfolhatatlan. A matematika történetét, eredményeinek értelmezését, a matematika és a gondolkodás, a matematika és a valóság kapcsolatának filozófiai értelmezésével foglalkozó véleményeket áttekintve megfigyelhető, hogy ez már a matematika megjelenéstől fogva sem volt ilyen egyértelmű. A matematika fejlődéséhez azok a matematikusok járultak hozzá legjelentősebben, akik a bizonyosságtól eljutottak a kétkedésig, majd a kétkedéstől egy újabb bizonyosságig.

A matematikai gondolkodás fejlődési ciklusai azonos módon alakultak. A ciklus első szakaszában a felmerült problémák megoldására az eddigi ismeretek, módszerek alkalmazásával próbálkoztak a matematikusok. E próbálkozások részleges sikerei és sikertelenségei egyre több ellentmondást, úgynevezett antinómiát tártak fel. Az ellentmondások feloldása rendszerint új fogalmak, módszerek bevezetésével sikerült. Például a végtelen sorok összegének meghatározásakor a véges sorok összegére vonatkozóan érvényesnek elfogadott, bizonyosnak tekinthető szabályok, módszerek alkalmazásával ugyanazon végtelen sor összegére különböző „eredmények" adódtak. A kétségek, bizonytalanságok feloldását a végtelen sor összegének új módon történő értelmezése jelentette.

A matematika és a matematika filozófiájának gyökerei időszámításunk előtt több évezredig nyúlnak vissza. Mezopotámiában, Egyiptomban és főként a vizek mellett létrejött civilizációkban már ismerték és használták a számokat, egyes tételek tartalmát, mint a Thalesz- és a Pithagorasztétel geometriai tartalmát, melyeket valamely szituációban megvalósult adottságként kezeltek. Nem jöttek létre bizonyítások, nem mondtak ki tételeket, mert nem volt rá igényük, ezek a dolgok bizonyosságok voltak, valóságértékük nem volt kétséges.

Nagy változás i.e.-i V. században a görögség körében jött létre. Ebben az időben a matematika központi szerepet kapott. A pithagoreusok még azt állították, hogy „minden dolog lényege a szám". Később viszont a számok helyett a geometriai alakzatokat helyezték mindenek fölé. A szemléletváltozás azért következett be, mert olyan távolságok létezését sikerült bizonyítani, melyek nem voltak kifejezhetőek az akkor is ismert (mai fogalmaink szerint racionális) számokkal. Ilyen távolság például az egységnyi oldalú négyzet átlója. Az irracionális hosszúságok létezésének bizonyítása a görög matematika legnagyobb sikerei közé tartozik. Az irracionális közvetlen tapasztalati bizonyításának reménytelensége Platónt és követőit arra a nézetre késztette, hogy a matematika segítségével olyan igazságokat tárjon fel, amelyek a közvetlen tapasztalat számára hozzáférhetetlenek. A filozófia feladata ekkor az igazi tudás feltárása volt, a matematika pedig lényegében azonosult a geometriával. Így Platón és Arisztotelész filozófiájának vizsgálatakor is a geometria filozófiájáról beszélhetünk.

Platón egyik művében, a Menónban a tanító egy rabszolgával beszélget, és eközben vezeti rá bizonyos matematikai problémák megoldására. Platón arra mutat rá ebben a művében, hogy tudásunk csak visszaemlékezés a születés előtti életünkre, hiszen a rabszolgafiú sohasem tanulta azokat a dolgokat, amikre rájött a tanító kérdéseinek segítségével.

A platonizmus lényege is az, hogy a matematikai objektumok valósak, határozott tulajdonságokkal rendelkeznek, amiket ismerünk vagy sem, de ezek nem világi, materiális jellegűek, tehát állandóak. A matematikus sem találhat fel semmit, hiszen már minden készen van, csak nyilvánvaló igazságokból kiindulva, alapos érveléssel juthat rejtett igazságok felfedezéséig.

Platónt alig fél évszázaddal követő Euklidész munkássága olyan jelentőségű volt hosszú ideig a matematika történetében, hogy művét sokáig úgy kezelték, mint a valóságra vonatkozó világos és kétségbevonhatatlan igazságokat tartalmazó könyvet. Ettől fogva mondhatjuk, hogy a matematika igazán tudománnyá vált. A XIX. század közepéig vitathatatlan igazságként funkcionált Euklidész geometriája. Ez lényegében azon alapszik, hogy önmagában nyilvánvaló igazságokból kiindulva, és szigorú szabályok szerint végzett bizonyításokat követve, olyan tudáshoz, eredményekhez juthatunk, amelyek biztosak, objektívek. A gondolkodás fejlődésében, korlátozásában betöltött szerepét mutatja, hogy még napjainkban is a legtöbb művelt ember csak Euklidész geometriáját ismeri.

Jelentősebb változásról a reneszánsz idején beszélhetünk, amikor a Platón idején jellemző „Jó tudása" átalakult „Isten tudásává". Bár a racionalisták elutasították a hatalom, főként a vallási hatalom felsőbbrendűségét, ez nem jelentett veszélyt a hatalom számára, mivel a filozófiát Isten tanulmányozásával azonosították. A kor történelmi háttere, a különböző irányzatok harcai lehetőséget adtak arra, hogy a tudományok, így a matematika tudományának bölcsessége is változzon. Központi szerepet kapott az anyagi világ, főként a megfigyelés és a kísérletezés, mely dolgok a tudás megszerzésének szükséges eszközeivé váltak.

Az empiristák álláspontja volt, hogy a világról a megfigyelések során szerezhetünk ismereteket, persze ez alól a matematikai tudás kivételt képezett, eredetének megmagyarázásával nem foglalkoztak jelentősen.

A XVIII. század végén a filozófiában nagy jelentőséget kapott Kant metafizikája, ami Platón örökségének folytatása volt. Kant a bizonyosat kereste az emberi tudásban, a tapasztalattól független és az időtlen emberi tudást. A geometriával és az aritmetikával összekapcsolható tér és idő intuíciói véleménye szerint objektívek, egyetemesen érvényesek minden emberi elmére. A térre vonatkozó tudást a geometria rendszerezi, véleménye szerint csak egyetlen geometria létezik, Euklidész geometriája.

A XIX. század közepéig nemcsak a matematika, hanem minden emberi tudás legszilárdabb, legmegbízhatóbb ágának az euklidészi geometriát tartották. Ekkor azonban számos gyökeres változás állt be, ami teljesen megrendítette a geometria eddigi szilárd bizonyosságát. Például többen, köztük Bolyai János, felfedezték a nem euklidészi geometriát. Az euklidészi gondolkodásmód fellazítása egyébként már a XVIII. században megkezdődött, hiszen Newton, Leibnitz és követőik analízisbeli eredményei távol voltak attól, hogy eleget tegyenek az euklidészi bizonyítás követelményeinek.

Cantor és Weierstrass voltak, akik ekkor a geometriától az aritmetika felé fordultak a matematika biztos alapjainak megtalálása érdekében. Törekvésük egyik próbálkozása volt a valós számok megkonstruálása egészekből. Próbálkozásuk eredménye lett a végtelen halmazok bevezetése a matematikába. Úgy tűnt, a halmaz az az egyszerű és alapvető fogalom, amelyből az egész matematika felépíthető, de ezt később többen is megcáfolták, többek között Bertrand Russel, a logicizmus első szószólója.

A logicista iskolát L.E.J. Brouwer konstruktivista iskolája követte, melynek alapja az volt, hogy a matematikai objektumok addig nem kapnak értelmet, amíg nincsenek véges sok lépésben a természetes számokból megkonstruálva.

A konstruktivizmus sokak számára nem volt elfogadható filozófiai irányzat. A XX. század közepétől pedig a formalizmus vált uralkodóvá, ami a matematikát a szigorú bizonyítások tudományának tartotta. A formalisták főként azzal magyarázták a matematika axiomatikus felépítését, hogy minden logikai bizonyításnak van kiindulópontja, így a matematikát is bizonyos definiálatlan, úgynevezett alapfogalmakból és az ezekre épülő állításokból, úgynevezett axiómákból kell felépíteni.

A XX. század matematikájának filozófiáját a matematika kétségbevonhatatlan megalapozásának mozgalma jellemzi. Az alapok keresése elvezetett egy fontos problémához, amely szerint kérdéses, hogy miként lehet kísérletekből, megfigyelésekből általános törvényeket levezetni. Papper volt, aki azt hangoztatta, hogy a tudomány elméletei nem vezethetőek le induktív tényekből. Szerinte egy elmélet akkor tudományos, ha alkalmas próbatételre, és fennáll elvetésének lehetősége is. Viszont az alkalmazások szempontjából elengedhetetlen, hogy a matematikai állítások, eljárások megbízhatóak legyenek. A megbízhatóság kritériumaként a bizonyítottság a matematikusok között is alapvető normává vált.

A matematikai logika megalkotása, a matematikai bizonyítás (és fogalomalkotás) a szabatosság objektív normáinak kialakulását eredményezte. A matematikai eredmények megbízhatóságát erősíti, hogy a mai szakfolyóiratok nem fogadnak el olyan cikkeket, amelyek nem teljesítik a szabatosság mai követelményeit. A homályos fogalomalkotás, a hiányos bizonyítás olyan történeti példái, mint az infinitezimálisok, a Fourier-sorok vagy az Euler-tétel esete napjainkban már bizonyára nem fordulhatnak elő.

Látható, hogy a matematika filozófiájának történetében nincs olyan időszak, amikor kizárólag bizonyosságról beszélhetünk, mert mindig ott van az emberi elme kétkedése a bizonyossággal szemben.

Tisztelt Előfizetőinkhez!

Mindenképpen bízunk abban, hogy továbbra is töretlen támogatói, előfizetői maradnak lapunknak. Ennek reményében kérjük tisztelettel minden Előfizetőnket, hogy az *1996. évi előfizetési díjat, amely ettől az évtől 300 forint, az alábbi számlára befizetni szíveskedjék: OTP Csongrád Megyei Igazgatóság, Szeged, Módszertani Közlemények; 11735005-20003933.* Aki *200 forintot* fizetett be, attól *csak a különbözet* befizetését kérnénk.

A MÓDSZERTANI KÖZLEMÉNYEK SZERKESZTŐSÉGE ÉS KIADÓHIVATALA